TD EM3

SF1

L'étude des symétries et invariances donnent $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u_r}$

Par ailleurs, on a l'équation de Maxwell-Gauss : $\operatorname{div}\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$

Or, ayant $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u_r}$, on a $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E)}{dr}$

Considérons dans un premier temps $r < R$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E)}{dr} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \quad \text{ie} \quad d(r^2E) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} r^2 dr$$

On intègre entre $r = 0$ et r : $r^2 E(r) - 0^2 \times E(0) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{3}0\right)$

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r}$$

Si maintenant on considère $r > R$: $\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E)}{dr} = 0$

ie $r^2 E(r) = \text{cste}$, or $E(R) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} R$

Donc $R^2 \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} R = \text{cste}$ et $\boxed{E(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 r^2} R^3}$

On retrouve bien les résultats du cours de EM1 :)

SF2

L'équation de Maxwell-Gauss nous donne $\rho = \varepsilon_0 \, \mathrm{div} \, \vec{E}$.

Donc
- $x > a$ et $x < a$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{dE}{dx} = 0$ ie $\rho = 0$
- $x \in [-a ; a]$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{dE}{dx} = \frac{E_0}{a}$ ie $\rho = \varepsilon_0 \frac{E_0}{a}$.

Exercice 2 - Pince ampèremétrique

(⚠ pistes pas rédigées)

1) $\vec{B} = \begin{cases} \vec{0} & \text{en dehors} \\ \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}\,\vec{u_\theta} & \text{dans le tore.} \end{cases}$

2) $\varphi_{spire} = \iint_{spire} \vec{B}\cdot d\vec{S}$ $\qquad d\vec{S} = dr\,dz\,\vec{u_\theta}$

$\longrightarrow \varphi_{spire} = \dfrac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln\left(\dfrac{b + a/2}{b - a/2}\right)$ et $\varphi_{tot_1} = N \varphi_{spire}$.

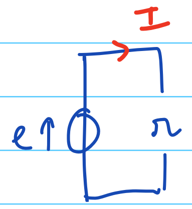
3) $\varphi_{tot_2} = \dfrac{\mu_0 N i a}{2\pi} \ln\left(\dfrac{b + a/2}{b - a/2}\right)$ donc $\dfrac{\varphi_{tot1}}{\varphi_{tot2}} = N \dfrac{I}{i}$

4) Def $\varphi_{tot1} = L I$ $\qquad \rightarrow L$ et M

$\varphi_{tot2} = M i$

$\dfrac{L}{M} = N$ $\rightarrow$ • bobine torique adaptée au couplage avec un fil
↳ expression simple
• si $N \gg 1$ on peut négliger la mutuelle devant l'auto induction.

5) Schéma équivalent du bobinage du tore :



$e = -\dfrac{d(\varphi_{tot1} + \varphi_{tot2})}{dt} = -L\dfrac{dI}{dt} - M\dfrac{di}{dt} = rI$

$i_{ind} = I$

en RSF $\rightarrow \underline{i_{ind}} = -\dfrac{j\omega M}{r + j\omega L}\,\underline{i}$

6) $\left|\dfrac{\underline{i_{ind}}}{\underline{i}}\right| = \dfrac{M\omega}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}$ si $L\omega \gg r$ alors $\left|\dfrac{\underline{i_{ind}}}{\underline{i}}\right| \simeq \dfrac{M}{L} = \dfrac{1}{N}$

$= \dfrac{M\omega / r}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2 L^2}{r^2}}}$

7) $|\underline{i_{ind}}| = \dfrac{|\underline{i}|}{N}$ $\rightarrow$ on divise le courant mesuré par N : pratique si $|\underline{i}|$ très grand pour nos appareils de mesure

Exercice 3 - Floculation d'une suspension colloïdale

1) Le rayon d'une particule colloïdale est de 10^{-8} m à 10^{-6} m, ce qui est très grand devant le rayon d'un ion ($\sim$ de l'ordre de celui d'un atome) à 10^{-10} m.
On peut donc considérer les ions comme ponctuels.

Pour justifier qu'on néglige quelque chose (ici l'extension spatiale des ions), il faut toujours faire une comparaison pour montrer devant quoi on peut négliger cette grandeur.

2) On a $\rho(r) = +ze\,N_+(r) - ze\,N_-(r) = ze\,N_0\left(e^{-\frac{ze\,V(r)}{k_BT}} - e^{\frac{ze\,V(r)}{k_BT}}\right)$

L'énoncé donne $|ze\,V(r)| \ll k_BT$

Dès qu'il y a un « $\ll$ ou $\gg$ » dans un énoncé, il y a TRÈS souvent un DL à faire.

On a donc $e^{\pm\frac{ze\,V(r)}{k_BT}} \simeq 1 \pm \frac{ze\,V(r)}{k_BT}$

et $\rho(r) = ze\,N_0\left(1 - \frac{ze\,V(r)}{k_BT} - \left(1 + \frac{ze\,V(r)}{k_BT}\right)\right) = \boxed{-\frac{2z^2e^2N_0}{k_BT}V(r)}$

3) On a la loi de Poisson : $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Donc ici $\frac{1}{r}\frac{d^2(rV)}{dr^2} = +\frac{2z^2e^2N_0}{\varepsilon_0k_BT}V(r)$.

ie $\frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{2z^2e^2N_0}{\varepsilon_0k_BT}rV = 0$

En posant $u = rV$, on a $\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{u}{\delta^2} = 0$
et $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_0k_BT}{2z^2e^2N_0}}$.

On reconnaît une ED de même type que l'exercice de l'ailette (T3)

On a le polynôme caractéristique : $x^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$ ie $x = \pm\frac{1}{\delta}$

On a donc $u(r) = A\,e^{-r/\delta} + B\,e^{+r/\delta}$, $A, B \in \mathbb{R}$

Donc $V(r) = \frac{A}{r}e^{-r/\delta} + \frac{B}{r}e^{r/\delta}$

En choisissant le potentiel nul à l'infini, on a $B = 0$

On a donc $\boxed{V(r) = \frac{A}{r}e^{-r/\delta}}$

4) On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{dV}{dr}\vec{u_r}$

Donc $E(r) = -\left(-\frac{A}{r^2} e^{-r/\delta} + -\frac{1}{\delta}\frac{A}{r} e^{-r/\delta}\right)$

$$\boxed{E(r) = \frac{A}{r^2}\left(1 + \frac{r}{\delta}\right) e^{-r/\delta}}$$

Appliquons le théorème de gauss sur la particule colloïdale (sphère de centre O et de rayon R) :

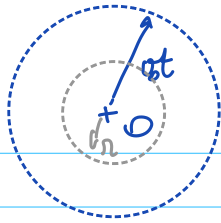
$$\oint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{A}{\cancel{R^2}}\left(1+\frac{R}{\delta}\right) e^{-R/\delta} \times 4\pi \cancel{R^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

D'où $A = K = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (1+\frac{R}{\delta})} e^{R/\delta}$

Au final $\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{1+r/\delta}{1+R/\delta} e^{(R-r)/\delta}}$

5) Plus on ajoute d'ions, plus N_0 augmente, plus δ diminue.
Autrement dit, plus le champ électrique auquel est soumis le colloïde décroît rapidement (dans $e^{-r/\delta}$).
Ainsi plus on ajoute d'ion, moins le champ créé autour du colloïde est étalé : les autres colloïdes seront donc moins facilement repoussés, ce qui est favorable à la floculation.



Exercice 4 - Sphère radioactive

1) si $r > v_0 t$, $Q(r,t) = Q_0$

si $r < v_0 t$, $Q(r,t) = Q_0 - q$

où q est la charge entre r et $v_0 t$, donc la charge émise depuis $t=0$ moins la charge toujours dans la sphère de rayon r, ie émise depuis $\frac{r}{v_0}$.

ie $q = -e\alpha t + e\alpha \frac{r}{v_0}$

Donc $$\boxed{Q(r,t) = \begin{cases} Q_0 & \text{si } r > v_0 t \\ Q_0 + e\alpha t - e\alpha \frac{r}{v_0} & \text{si } r < v_0 t \end{cases}}$$

2) Pour $r > v_0 t$, $\vec{j} = \vec{0}$ et $\rho = 0$

Pour $r < v_0 t$, considérons la sphère de rayon r, on a

$$I = \iint \vec{j}(r,t) \cdot d\vec{S} = \iint j(r,t)\,\vec{u_r} \cdot dS\,\vec{u_r} = j(r,t)\, 4\pi r^2$$

j ne dépend que de r fixé sur S

Par ailleurs $I = \frac{\delta Q}{dt}$ où δQ est la charge sortant de la sphère,

on a donc $I = -\frac{\partial Q(r,t)}{\partial t}$

On a donc $j(r,t)\, 4\pi r^2 = -\frac{\partial Q}{\partial t} = -e\alpha$

Donc $j(r,t) = -\frac{e\alpha}{4\pi r^2}$ d'où $\boxed{\vec{j}(r,t) = -\frac{e\alpha}{4\pi r^2}\,\vec{u_r}}$

Enfin, $\vec{j}(r,t) = \rho(r,t)\, v_0\, \vec{u_r}$

Donc $\boxed{\rho(r,t) = -\frac{e\alpha}{4\pi r^2 v_0}}$

3) Tous les plans contenant Π et $\vec{u_r}$ sont plans de symétrie pour les distributions de charge et de courant.

Donc $\vec{E}$ est porté par $\vec{u_r}$

et $\vec{B}$ étant perpendiculaire à tous ces plans, on a $\vec{B} = \vec{0}$.

On a par ailleurs invariance des distributions par rotations autour de O

Donc

$$\vec{E}(r,t) = E(r,t)\,\vec{u_r}$$

On applique le théorème de Gauss à une sphère de centre O et de rayon r :

$$\oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E}(r,t).\,d\vec{S} = \frac{Q_\Sigma}{\varepsilon_0}$$

On a $\oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E}(r,t).\,d\vec{S} = 4\pi r^2\, E(r,t)$

et $Q_\Sigma = Q(r,t)$

Donc $\boxed{E(r,t) = \dfrac{Q(r,t)}{\varepsilon_0 4\pi r^2}}$

4) ∘ $\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$?

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r^2} \times \frac{\partial\left(\frac{Q(r,t)}{\varepsilon_0 4\pi}\right)}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \times \left(-\dfrac{e\alpha}{v_0}\right) = -\dfrac{\rho(r,t)}{\varepsilon_0} & \text{si } r < v_0 t \\ 0 & \text{si } r > v_0 t \end{cases}$$

✓

∘ $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ✓

∘ $\mathrm{div}\,\vec{B} = \mathrm{div}(\vec{0}) = 0$ ✓

∘ $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{0} = \vec{0}$

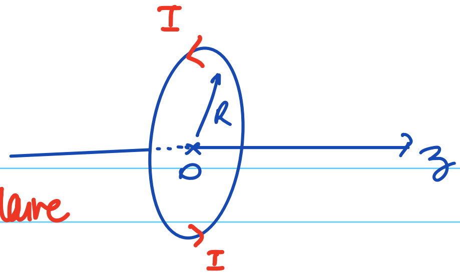
car Π est fixé donc $\vec{u_r}$ aussi

et $\mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(-\dfrac{e\alpha}{4\pi r^2}\vec{u_r} + \underbrace{\dfrac{1}{4\pi r^2}\dfrac{\partial Q}{\partial t}\vec{u_r}}_{\frac{\partial E(r,t)\vec{u_r}}{\partial t} =} \right)$

$\dfrac{\partial Q}{\partial t} = e\alpha$

$= \vec{0}$ ⇓

Exercice 5 - Calcul de $\vec{B}$ créé par une spire circulaire



1) a) $\forall M \in (Oz)$, tous les plans contenant $\vec{OM}$ sont plans d'antisym de la distribution de courant.

Donc $\vec{B}(M) = B(M)\,\vec{u_z}$

Sur l'axe, $r = 0$ et θ non défini, donc $B(M) = B(z)$

Ainsi $\vec{B}(M) = B_0(z)\,\vec{u_z}$

b) le plan (Oxy) est plan de symétrie pour la distribution de courant.
C'est donc un plan d'antisymétrie pour $\vec{B}$. Or $\vec{B} \perp (Oxy)$, donc

$$\vec{B_\perp}(M) = \vec{B_\perp}(M') \quad \text{si } M \text{ et } M' \text{ sym } / (Oxy)$$

ainsi $B(z) = B(-z)$ B est donc paire.

2) a) Soit $M \notin (Oz)$. Le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est plan d'antisymétrie de la distribution, donc plan de symétrie pour $\vec{B}$.

Donc $\vec{B} \in (M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$

on en déduit que $\vec{B}(M) = B_r(M)\,\vec{u_r} + B_z(M)\,\vec{u_z}$

Par ailleurs, la distribution est invariante par rotation autour de (Oz)

Donc $B(M) = B(r, z)$

b) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

(il manque dans le sujet en cylindriques $\operatorname{div}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$)

i.e. $\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$

si $r \ll R$, on peut considérer $B_z(r,z) \simeq B_0(z)$

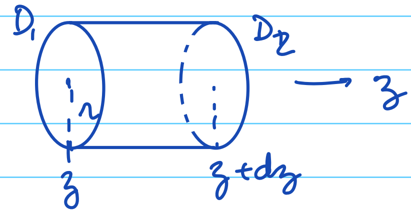
$$\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -r\,\frac{dB_0}{dz}$$ → ind. de r

$$r B_r(r,z) = -\frac{1}{2} r^2 \frac{dB_0}{dz} + \underbrace{\text{cste}(z)}_{=0}$$ par évaluation en $r = 0$

ie $\boxed{B_r(r,z) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_0}{dz}}$

① pas rédigé

c)



$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_{D_1} \left(B_r\,\vec{u_r} + B_0(z)\,\vec{u_z}\right)\cdot dS\left(-\vec{u_z}\right)$$

$$+ \iint_{Lat} \left(B_r\,\vec{u_r} + B_0\,\vec{u_z}\right)\cdot dS\,\vec{u_r}$$

$$+ \iint_{D_2} \left(B_r\,\vec{u_r} + B_0(z+dz)\,\vec{u_z}\right)\cdot dS\,\vec{u_z}$$

$$= B_0(z+dz)\pi r^2 - B_0(z)\pi r^2 + B_r(r,z)\,2\pi r\,dz$$

$$= \pi r^2 \frac{dB_0}{dz}dz + B_r(r,z)\,2\pi r\,dz$$

or $\oiint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$, donc $\cancel{\pi} r^2 \dfrac{dB_0}{dz}dz + B_r(r,z)\,2\cancel{\pi} r\,dz = 0$

ie $\boxed{B(r,z) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_0}{dz}}$:)